Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Michele Serra, Sarah Tanja Hess

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2021

Übungen zur Vorlesung Algebra II
Blatt 2

Abgabe von: Mein Name
Tutor: Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 4 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 2.1 **[1+3 Punkte]**

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, M ein R-Modul und S, T Untermoduln von M.

(a) Zeigen Sie $(S+T)/T \simeq S/(S \cap T)$.

(b) Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $M = S \oplus T$

(ii) $M = S + T$ und $S \cap T = \{0\}$

(iii) Für jedes $m \in M$ existiert ein eindeutiges $s \in S$ und ein eindeutiges $t \in T$ mit $m = s+t$.

Lösung:

Aufgabe 2.2 **[2+2 Punkte]**

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, M ein R-Modul und N ein Untermodul von M.

(a) Zeigen Sie, dass falls M endlich erzeugt ist, auch M/N endlich erzeugt ist.

(b) Zeigen Sie, dass falls N und M/N endlich erzeugt sind, auch M endlich erzeugt ist.

Lösung:

Aufgabe 2.3 **[1,5+1,5+1 Punkte]**

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, M, N R-Moduln und $\phi\colon M \to N$ ein R-Moduln-Homomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass M_{tor} ein Untermodul von M ist.

(b) Beweisen Sie $(M \oplus N)_{\text{tor}} = M_{\text{tor}} \oplus N_{\text{tor}}$.

(c) Beweisen Sie $\phi(M_{\text{tor}}) \subseteq N_{\text{tor}}$.

Lösung:

Aufgabe 2.4* **[4 Punkte]**

Sei R ein integer kommutativer Ring mit 1, M ein R-Modul und $S \subseteq M$ torsionsfrei. Zeigen Sie, dass M genau dann frei mit Basis S ist, wenn $M = \bigoplus_{s \in S} Rs$ gilt.

Lösung:

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 06. Mai 2021, um 10:00 Uhr**, direkt an den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.